УДК 514.75

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ, АССОЦИИРОВАННЫЕ С $\mathcal{H}$-РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

М.Ф. Г р е б е н ю к

(Киевское ВВАИУ)

В $(n+1)$-мерном аффинном пространстве A_{n+1} в различных дифференциальных окрестностях изучаются неголономные композиции А.П.Нордена на оснащающих распределениях $\mathcal{H}$-распределения. Объектом, ассоциированным с неголономной композицией А.П.Нордена (χ,Λ), определяется плоскость Нордена-Тимофеева, полученная ранее в работе [2] с помощью фокальных многообразий. Отмечено, что на ассоциированных распределениях индуцируются f-структуры рангов $r+n$ и $m+n$ неголономными композициями А.П.Нордена, заданными на H-распределении. Настоящая работа является непосредственным продолжением работ [1],[2].

I. $H\Lambda$-виртуальную нормаль N_{n-r} первого рода Λ-распределения в репере нулевого порядка R^0 определим векторами $\vec{P}_u = \vec{e}_u + \nu^p_u \vec{e}_p$. Дифференциальные уравнения поля геометрического объекта $\{\nu^p_u\}$ имеют вид

$$\nabla \nu^p_u + \omega^p_u = \nu^p_{u\varkappa}\,\omega^\varkappa_0 .$$

В окрестности первого порядка рассмотрим величины

$$\overset{*}{B}{}^s_u = -\Lambda_{pu}\Lambda^{sp},$$

которые в совокупности образуют квазитензор:

$$\nabla \overset{*}{B}{}^s_u + \omega^s_u = \overset{*}{B}{}^s_{u\varkappa}\,\omega^\varkappa,$$

определяющий $H\Lambda$-виртуальную нормаль $\{\overset{*}{B}{}^s_u\}$ элемента Λ-распределения, отличную от ранее построенной $\{\chi^p_u\}$[2]. Таким образом, в дифференциальной окрестности первого порядка к Λ-распределению внутренним инвариантным образом присоединяется поле однопараметрического пучка $(\chi,\overset{*}{B})$ $H\Lambda$-виртуальных нормалей первого рода, которое определяется пучком квазитензоров $\chi^p_u(\varepsilon) = \chi^p_u + \varepsilon\,\overset{*}{S}{}^p_u$, где ε -абсолютный инвариант, а величины $\overset{*}{S}{}^p_u$ образуют тензор: $\overset{*}{S}{}^p_u = \chi^p_u - \overset{*}{B}{}^p_u$, $\nabla \overset{*}{S}{}^p_u = \overset{*}{S}{}^p_{u\varkappa}\,\omega^\varkappa$. В случае $\Lambda_{pu}=0$ поле однопараметрического пучка вырождается в поле $H\Lambda$-виртуальных нормалей первого рода $\chi(A)$.

2. Векторы $\vec{R}_\rho = H^\pi_\rho \vec{e}_\pi$, где

$$H^q_p = \delta^q_p,\quad H^u_p = 0,\quad H^p_u = \nu^p_u,\quad H^v_u = \delta^v_u, \qquad (I)$$

линейно независимы. Поэтому существует обратная матрица $\|\overset{*}{H}{}^\pi_\rho\|$ такая, что имеют место

$$H^\pi_\rho \overset{*}{H}{}^\rho_\tau = \delta^\pi_\tau,\quad H^\rho_\pi \overset{*}{H}{}^\sigma_\rho = \delta^\sigma_\pi . \qquad (2)$$

Учитывая (I) и (2), находим, что

$$\|\overset{*}{H}{}^\pi_\rho\| = \begin{Vmatrix} \delta^p_q & -\nu^p_u \\ 0 & \delta^v_u \end{Vmatrix} \qquad (3)$$

Величины $P^\pi_\rho = \delta^\pi_\rho - 2H^\pi_p \overset{*}{H}{}^p_\rho$ образуют тензор. Используя компоненты матрицы $\|\overset{*}{H}{}^\pi_\rho\|$, находим компоненты тензора P^π_ρ:

$$P^p_q = -\delta^p_q,\quad P^p_u = 2\nu^p_u,\quad P^v_q = 0,\quad P^v_u = \delta^v_u . \qquad (4)$$

Заметим, что тензор P^π_ρ удовлетворяет уравнениям $P^\pi_\rho P^\rho_\sigma = \delta^\pi_\sigma$.

Известно, что всякая π-структура вполне определяется полем аффинора S^π_ρ $(S^\pi_\rho \neq \delta^\pi_\rho)$, удовлетворяющего уравнениям [4]

$$S^\pi_\rho S^\rho_\sigma = \delta^\pi_\sigma .$$

Т е о р е м а 1. H-распределение несет однопараметрическое семейство инвариантных неголономных композиций А.П.Нордена $(\chi(\varepsilon),\Lambda)$, внутренним образом связанных с H-распределением в дифференциальной окрестности первого порядка, базовыми распределениями которых являются распределения плоскостей $\chi(\varepsilon)$ и Λ, определенных пучком аффиноров $P^\pi_\rho(\varepsilon)$, где

$$\|P^\pi_\rho(\varepsilon)\| = \begin{Vmatrix} -\delta^p_q & 2\chi^p_u(\varepsilon) \\ 0 & \delta^v_u \end{Vmatrix}$$

$\chi(\varepsilon)$-плоскости пучка $(\chi(\varepsilon),\overset{*}{B})$, соответствуют пучку квазитензоров $\chi^p_u(\varepsilon)$.

З а м е ч а н и е. В случае $\Lambda_{pu}=0$ пучок $(\chi(\varepsilon),\Lambda)$ неголономных композиций А.П.Нордена H-распределения вырождается в неголономную композицию А.П.Нордена (χ,Λ).

Т е о р е м а 2. В дифференциальной окрестности порядка $t\geqslant 2$ к H-распределению внутренним инвариантным образом присоединяются (при $\Lambda_{pu}\neq 0$) два однопараметрических семейства неголономных композиций А.П.Нордена. Если $\Lambda_{pu}=0$, то к H-

распределению в той же дифференциальной окрестности порядка $t \geqslant 2$ присоединяется одно поле однопараметрических семейств неголономных композиций А.П.Нордена.

3. Следуя А.П.Нордену и Г.Н.Тимофееву [3], введем системы величин
$$\begin{cases} \beta_\varrho = \frac{1}{2} P^{\pi}_{\sigma} P^{\sigma}_{\varrho\pi}, \qquad \sigma_\varrho = \frac{1}{2} P^{\pi}_{\varrho\pi}, \\ j_\varrho = \frac{1}{2(n-m)} (\sigma_\varrho + \beta_\varrho) - \frac{1}{2r} (\sigma_\varrho - \beta_\varrho). \end{cases} \tag{5}$$
В отличие от случая, рассмотренного в работе [3], $\{\beta_\varrho\}$ и $\{\sigma_\varrho\}$ самостоятельных объектов не образуют. С учетом формул (4) имеем
$$P^{p}_{qk} = -2\nu^{p}_{u} \Lambda^{u}_{qk}, \qquad P^{q}_{uk} = 2\nu^{q}_{uk},$$
$$P^{u}_{pk} = -2\Lambda^{u}_{pk}, \qquad P^{u}_{vk} = 2\nu^{p}_{v} \Lambda^{u}_{pk}.$$
Специализируем репер, совместив вектор $\vec{e}_{n+1}$ с инвариантной нормалью ν. При этом из формул (5) установим, что величины j_ϱ принимают вид $j_p = \ell_p$, $j_u = \chi_u - \ell_p \chi^p_u$, где $\chi_u = -\frac{1}{r}(\chi^p_{up} - \chi^p_v \chi^t_u \Lambda^v_{tp})$.

Следовательно, объект $\{j_\varrho\}$, ассоциированный с композицией (χ, Λ), определяет $H\Lambda$-виртуальную плоскость Нордена-Тимофеева, построенную в работе [2] с помощью фокальных многообразий.

4. HM-виртуальную нормаль $\mathcal{N}_{n-m}$ первого рода M-распределения в репере нулевого порядка R^0 определим векторами $\vec{P}_\alpha = \vec{e}_\alpha + \nu^a_\alpha \vec{e}_a$. Компоненты геометрического объекта $\{\nu^a_\alpha\}$, дифференциальные уравнения поля которого имеют вид $\nabla\nu^a_\alpha + \omega^a_\alpha = \nu^a_{\alpha x}\omega^x$, принимают следующие значения: $\nu^a_\alpha = \varphi^a_\alpha$

В окрестности первого порядка рассмотрим величины $F^b_\alpha = -F_{a\alpha} F^{ba}$, где $F_{a\alpha} = \{\Lambda_{p\alpha}, M_{i\alpha}\}$, которые в совокупности образуют квазитензор, определяющий HM-виртуальную нормаль $\{F^b_\alpha\}$ элемента M-распределения, отличную от нормали $\{\varphi^a_\alpha\}$. Таким образом, в дифференциальной окрестности первого порядка к M-распределению внутренним инвариантным образом присоединяется поле однопараметрического пучка (φ, F) HM-виртуальных нормалей первого рода, которое определяется пучком квазитензоров $\varphi^b_\alpha(\sigma) = \varphi^b_\alpha + \sigma \overset{*}{N}{}^b_\alpha$, где σ -абсолютный инвариант, а величины $\overset{*}{N}{}^b_\alpha$ образуют тензор
$$\overset{*}{N}{}^b_\alpha = \varphi^b_\alpha - F^b_\alpha, \quad \nabla \overset{*}{N}{}^b_\alpha = \overset{*}{N}{}^b_{\alpha x} \omega^x.$$

5. Векторы $\vec{R}_\varrho = \Pi^\pi_\varrho \vec{e}_\pi$, где $\Pi^b_a = \delta^b_a$, $\Pi^\alpha_a = 0$, $\Pi^c_\alpha = \varphi^c_\alpha$, $\Pi^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta$, линейно независимы. Поэтому существует обратная матрица $\| \overset{*}{\Pi}{}^\pi_\varrho \|$. Находим, что

$$\| \overset{*}{\Pi}{}^\pi_\varrho \| = \begin{Vmatrix} \delta^a_b & -\varphi^a_\alpha \\ 0 & \delta^\beta_\alpha \end{Vmatrix}$$
Величины $\Phi^\tau_\sigma = \delta^\tau_\sigma - 2\Pi^\tau_a \overset{*}{\Pi}{}^a_\sigma$ образуют тензор, компоненты которого имеют вид: $\Phi^a_b = -\delta^a_b$, $\Phi^a_\alpha = 2\varphi^a_\alpha$, $\Phi^\beta_b = 0$, $\Phi^\beta_\alpha = \delta^\beta_\alpha$.

Т е о р е м а 3. В дифференциальной окрестности первого порядка к H-распределению внутренним инвариантным образом присоединяется однопараметрическое семейство неголономных композиций А.П.Нордена $(\Phi(\sigma), M)$, определенных полем однопараметрического пучка аффиноров $\Phi^\tau_\sigma(\varepsilon)$, где
$$\| \Phi^\tau_\sigma(\varepsilon) \| = \begin{Vmatrix} -\delta^a_b & 2\varphi^a_\alpha(\varepsilon) \\ 0 & \delta^\beta_\alpha \end{Vmatrix}$$

6. В дифференциальной окрестности первого порядка к Λ-распределению внутренним инвариантным образом присоединяется поле однопараметрического пучка $M\Lambda$-виртуальных нормалей первого рода, которое определяется пучком квазитензоров $\chi^p_i(\varepsilon) = \chi^p_i + \varepsilon \overset{*}{S}{}^p_i$, где ε -абсолютный инвариант, а величины $\overset{*}{S}{}^p_i = \chi^p_i - \overset{*}{B}{}^p_i$ образуют тензор.

Величины $\{P^a_b\}$, являющиеся подтензором тензора $\{P^\pi_\varrho\}$, образуют тензор, причем выполняется условие $P^a_b P^b_c = \delta^a_c$. Следовательно, при $\Lambda_{pi} \neq 0$ M-распределение несет однопараметрическое семейство инвариантных неголономных композиций А.П.Нордена $(\mathcal{L}(\varepsilon), \Lambda)$, внутренним образом связанных с $\mathcal{H}$-распределением в дифференциальной окрестности первого порядка, базовыми распределениями которых являются распределения плоскостей $\mathcal{L}(\varepsilon)$ и Λ, определенных пучком аффиноров $P^a_b(\varepsilon)$, где $\mathcal{L}(\varepsilon)$ -плоскости пучка, соответствуют пучку квазитензоров $\chi^p_i(\varepsilon)$. Полученные неголономные композиции А.П.Нордена являются обобщениями π-структур на касательно r-оснащенной поверхности $M_{m,r}$ аффинного пространства A_{n+1}.

Доказано, что с каждой π-структурой, заданной на H-распределении тензором из пучка $P^\pi_\varrho(\sigma)$, ассоциируется распределение, несущее f-структуру ранга $r+n$, а с каждой π-структурой, заданной на H-распределении тензором из пучка $\Phi^\pi_\varrho(\sigma)$, ассоциируется распределение, несущее f-структуру ранга $m+n$.

Библиографический список

1. Г р е б е н ю к М.Ф. Поля геометрических объектов трехсоставного распределения аффинного пространства//Дифференциаль-

ная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч .тр./ Калинингр.ун-т.Калининград,1987.Вып.18.С.21-24.

2.Г р е б е н ю к М.Ф. Фокальные многообразия,ассоциированные с $H(M(\Lambda))$ -распределением аффинного пространства//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз. темат.сб.науч. тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1988.Вып.19.С.25-30.

3.Н о р д е н А.П.,Тимофеев Г.Н. Инвариантные признаки специальных композиций многомерных пространств//Изв.вузов. Математика.1972.№8.С.81-89.

4.Ш и р о к о в А.П. Структуры на дифференцируемых многообразиях//Алгебра.Топология.Геометрия,1967/ ВИНИТИ.М.,1969. С.127-188.

УДК 514.75

К ГЕОМЕТРИИ СЕМЕЙСТВА СРЕДНИХ НОРМАЛЕЙ ПОВЕРХНОСТИ $V_p \subset E_n$

А.С.Г р и ц а н с
(МГПИ им.В.И.Ленина)

В работе изучаются двумерные линейчатые поверхности V_2, образованные средними нормалями поверхности $V_p \subset E_n$. Данная работа является обобщением работы [3].

1.Рассмотрим поверхность $V_p \subset E_n$ и отнесем ее к подвижному реперу $R = \{x, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha\}$ $(i,j,k=\overline{1,p};\ \alpha,\beta=\overline{p+1,n})$, где x – точка на поверхности V_p, орты $\vec{e}_i$ лежат в касательной плоскости $T_p(x)$ к V_p, а векторы $\vec{e}_\alpha$ образуют ортонормированный базис нормального пространства $N_{n-p}(x)$ поверхности V_p. Вектор $\vec{e}_0 = \vec{e}_{p+s+1}$ $(0 \le s \le p$, s -фиксировано) направим параллельно вектору средней кривизны поверхности V_p [1]: $\vec{M} = \frac{1}{p}\gamma^{ij} b^\alpha_{ij}\vec{e}_\alpha$, который в силу неминимальности V_p ненулевой.

Деривационные формулы репера R имеют вид $d\vec{x} = \omega^i\vec{e}_i$, $d\vec{e}_i = \omega^j_i\vec{e}_j + \omega^\alpha_i\vec{e}_\alpha$, $d\vec{e}_\alpha = \omega^i_\alpha\vec{e}_i + \omega^\beta_\alpha\vec{e}_\beta$. Продолжая систему уравнений $\omega^\alpha = 0$ поверхности V_p, получим $\omega^\alpha_i = b^\alpha_{ij}\omega^j$, $b^\alpha_{ij} = b^\alpha_{ji}$. Встречающиеся в дальнейшем индексы будут принимать следующие значения: $\hat{i},\hat{j} = \overline{0,p}$; $\hat{\alpha},\hat{\beta} = p+1,\dots,p+s,p+s+2,\dots,n$. Впредь во всех формулах вместо индекса $p+s+1$ будем писать 0.

Средние нормали поверхности V_p образуют $(p+1)$-мерную

линейчатую поверхность V_{p+1}, уравнение которой

$$\vec{R} = \vec{x} + t\vec{e}_0 \tag{1}$$

Дифференцируя (1), находим

$$\begin{gathered} d\vec{R} = \Omega^{\hat{i}}\vec{E}_{\hat{i}},\ \Omega^0 = dt,\ \Omega^i = \omega^i,\ \vec{E}_0 = \vec{e}_0,\ \vec{E}_i = \vec{e}_i + t\vec{a}_i, \\ d\vec{e}_0 = \vec{a}_i\omega^i,\ \vec{a}_i = -\gamma^{jk} b^0_{ki}\vec{e}_j + \xi^{\hat{\alpha}}_i\vec{e}_{\hat{\alpha}},\ \bar{\gamma}_{ij} = \vec{a}_i\vec{a}_j, \\ \gamma_{ij} = \vec{e}_i\vec{e}_j,\ \gamma^{jk}\gamma_{ki} = \delta^j_i,\ \omega^{\hat{\alpha}}_0 = \xi^{\hat{\alpha}}_k\omega^k,\ \xi^{\hat{\alpha}}_k = \frac{\gamma^{ij} b^{\hat{\alpha}}_{ijk}}{\gamma^{ij} b^0_{ij}} \end{gathered} \tag{2}$$

В дальнейшем будем предполагать, что $\dim \mathcal{N} = p$, где $\mathcal{N} = [\vec{a}_i]$ – касательное направление гиперсферического изображения $\bar{V}_p: \vec{x} = \vec{e}_0$ поверхности V_{p+1} [2].

Пространство $\mathfrak{M} = [R, \vec{e}_0, \vec{E}_i, \vec{a}_j]$ называется касательным пространством вдоль образующей поверхности V_{p+1} и является наименьшим пространством, содержащим все касательные плоскости поверхности V_{p+1} в точках одной образующей [2].

Площадка $\tilde{\Delta}_r(x)$, порождающая распределение $\tilde{\Delta}_r$, вдоль которого переносится параллельно в нормальной связности направление вектора средней кривизны, определяется системой $\xi^{\hat{\alpha}}_k\omega^k = 0$. Легко доказать следующее утверждение.

Т е о р е м а 1. Касательное пространство $\mathfrak{M}$ вдоль образующей поверхности V_{p+1} имеет размерность $p+s+1$ $(0 \le s \le p)$ тогда и только тогда, когда $\dim \tilde{\Delta}_r = p-s$

2.Линейчатая подповерхность $V_2 \subset V_{p+1}$ называется псевдоторсом (подповерхностью нулевого внешнего параметра распределения, торсом), если параметр распределения $\tilde{p}$ (соответственно $\hat{p}$, p) равен нулю [2]. В нашем случае

$$\tilde{p}^2 = \frac{\bar{\varphi}\theta - (\varphi^0)^2}{\bar{\varphi}^2},\quad \hat{p}^2 = \frac{\varphi - \theta}{\bar{\varphi}},\quad p^2 = \frac{\varphi\bar{\varphi} - (\varphi^0)^2}{\bar{\varphi}^2},$$

$$p^2 = \tilde{p}^2 + \hat{p}^2,\quad \varphi = \gamma_{ij}\omega^i\omega^j,\quad \bar{\varphi} = \bar{\gamma}_{ij}\omega^i\omega^j,$$

$$\varphi^0 = b^0_{ij}\omega^i\omega^j,\quad \theta = b^0_{ik} b^0_{jr}\bar{\gamma}^{kr}\omega^i\omega^j,\quad \bar{\gamma}^{jk}\bar{\gamma}_{ki} = \delta^j_i.$$

Рассмотрим некоторую линию ℓ на поверхности V_p и вектор $\vec{e}_{i_0}$ направим по касательной к линии ℓ. Тогда уравнение линии ℓ: $\omega^{i_0} \ne 0$, $\omega^j = 0$ $(j \ne i_0)$.

Т е о р е м а 2. Следующие утверждения равносильны:

1) Средние нормали описывают псевдоторсы вдоль линии ℓ;

2) $\vec{e}_{i_0}\vec{A}^j = 0$ $(j \ne i_0)$, где $\vec{A}^j = \bar{\gamma}^{jk}\vec{a}_k$;